Учебно пособие

за сем. упражнения (*задачи*) по Електродинамика

Гл. ас. Петко Митев

Тема: Кинематика на релативистка частица. 4-вектори и 4-тензори. Преобразования на Лоренц

❖ Теоретичен минимум

🕮 **Първи постулат на Айнщайн:**

Всички физични явления протичат по един и същ начин спрямо всяка инерциална отправна система.

Айнщайн издига и хипотеза за съществуването на крайна (*пределна*) скорост $c = 3.10^8\ m/s$, с която се предават взаимодействия в природата.

🕮 **Втори постулат на Айнщайн**:

Скоростта на светлината във вакуум е **една и съща** спрямо **<u>всяка</u>** инерциална ОС. Тя **не зависи** от движението на <u>източника</u> или <u>приемника</u> на светлината.

🕮 Съвкупността от постулатите **I** и **II** се нарича **Принцип на относителността на Айнщайн**, който е основополагащ принцип в **Специалната теория на относителността (СТО)**.

🕮 **Кинематика на релативистка частица в 4-мерна формулировка:**

✍ **4-вектор:** 4-компонентна величина, която при смяна на координатната система (*КС*) се трансформира по закона

✓ $X^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}.X^{/\nu}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$

където в частност

✓ $$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✓ **Контравариантен 4-вектор:** $A^{\mu} \equiv (A^0, \vec{A})$;

✓ **Ковариантен 4-вектор:** $A_{\mu} \equiv (A^0, -\vec{A})$.

✍ Връзка между **ковариантни** и **контравариантни** 4-вектори

✓ $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$

където

✓ $$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ - **<u>метричен тензор</u>** (*инвариант*).

✍ **Скаларен квадрат на 4-вектор:**

✓ $$A^2 = A_\mu A^\mu \equiv A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu A^\mu = A^0 A^0 - \vec{A}.\vec{A} = (A^0)^2 - (\vec{A})^2 \textbf{.}$$

📖 **4-радиус-вектор:** $X^\mu = (ct,\, \vec{r})$ **.**

📖 **Контравариантен 4-тензор** от II ранг: величина, която при смяна на КС се трансформира по закона

✓ $$\Phi^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda . \Lambda^\nu_\sigma . \Phi^{/\,\lambda\sigma} .$$

Тензорите биват:

- симетрични: $\Phi^{\mu\nu} = \Phi^{\nu\mu}$, и
- антисиметрични: $\Phi^{\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu}$, като очевидно $\Phi^{kk} = 0$.

📖 **Интервал:** $(dS)^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu\, dX^\nu$.

$$ds = \sqrt{dX^\mu dX_\mu} = \sqrt{(c.dt)^2 - (dr)^2} = c.dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = c.dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c.d\tau \textbf{,}$$

където $d\tau = dt\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{dt}{\gamma} < dt$ е т.нар. **собствено време**.

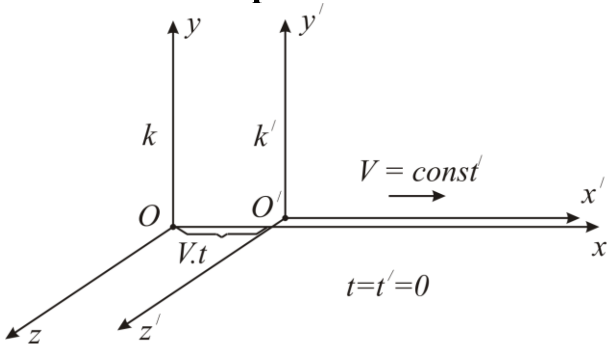
Щом $ds = c.d\tau$**,** то очевидно ds е **инвариантна величина** (*в качеството си на величина, явяваща се произведение от други два инварианта*).

а) Интервали, за които $(d\,S)^2 = 0$ са **светлинно-подобни**.

б) Интервали, за които $(d\,S)^2 > 0$, са **временно-подобни**. Две събития, свързани с временно-подобен интервал, са **причинно-свързани събития.**

в) Интервали, за които $(d\,S)^2 < 0$, са **пространствено-подобни.** Две събития, „свързани” с пространствено-подобен интервал, **<u>не могат</u> да бъдат причинно-следствено свързани помежду си**!

📖 **Трансформации на Лоренц. Трансформации на Лоренц за 4-вектор:**



✓ $$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^{/\,0} \\ x^{/\,1} \\ x^{/\,2} \\ x^{/\,3} \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} .$$

и ✓ $$\begin{pmatrix} x'^{0} \\ x'^{1} \\ x'^{2} \\ x'^{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^{0} \\ x^{1} \\ x^{2} \\ x^{3} \end{pmatrix}.$$

За компонентите на **4-радиус-вектора** $x^{\mu} = (ct, \vec{r})$ и за компонентите на произволен **4-вектор** $A^{\mu} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ „*правите*” и „*обратните*” преобразования на Лоренц имат (*съответно*) вида:

✓ $$\left| \begin{array}{l} x^0 = \gamma(x'^{0} + \beta x'^{1}) \\ x^1 = \gamma(x'^{1} + \beta x'^{0}) \\ x^2 = x'^{2} \\ x^3 = x'^{3} \end{array} \right. ;$$ ✓ $$\left| \begin{array}{l} A^0 = \gamma(A'^{0} + \beta A'^{1}) \\ A^1 = \gamma(A'^{1} + \beta A'^{0}) \\ A^2 = A'^{2} \\ A^3 = A'^{3} \end{array} \right. .$$

✓ $$\left| \begin{array}{l} x'^{0} = \gamma(x^{0} - \beta x^{1}) \\ x'^{1} = \gamma(x^{1} - \beta x^{0}) \\ x'^{2} = x^{2} \\ x'^{3} = x^{3} \end{array} \right. ;$$ ✓ $$\left| \begin{array}{l} A'^{0} = \gamma(A^{0} - \beta A^{1}) \\ A'^{1} = \gamma(A^{1} - \beta A^{0}) \\ A'^{2} = A^{2} \\ A'^{3} = A^{3} \end{array} \right. .$$

Преобразованията на Лоренц са известни още във вид на преобразования за 3-те пространствени координати и времето (*като независима променлива*):

$$(1) \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{x' + V.t'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma.(x' + V.t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma.\left(t' + \dfrac{V}{c^2} x' \right) \end{array} \right. , \quad \text{и } (2) \left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{x - V.t}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma.(x - V.t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \gamma.\left(t - \dfrac{V}{c^2} x \right) \end{array} \right. .$$

След умножаването на уравненията за трансформация на времето (*последните от горните уравнения*) със „*c*” (*скоростта на светлината*), уравненията (1) и (2) стават уравнения за трансформация на величини с една и съща (*пространствена*) размерност

$$(3)\quad \left|\begin{aligned} x &= \gamma.\left(x^{/}+\frac{V}{c}.(c.t^{/})\right)\\ y &= y^{/}\\ z &= z^{/}\\ c.t &= \gamma.\left((c.t^{/})+\frac{V}{c}x^{/}\right)\end{aligned}\right. ,\ \text{и}\quad (4)\quad \left|\begin{aligned} x^{/} &= \gamma.\left(x-\frac{V}{c}.(c.t)\right)\\ y^{/} &= y\\ z^{/} &= z\\ c.t^{/} &= \gamma.\left((c.t)-\frac{V}{c}x\right)\end{aligned}\right. ,$$

и в този си вид те съответстват напълно на трансформационните закони за компонентите на **4-радиус-вектора** $x^{\mu}=(ct,\,\vec{r})$, като за целта е необходимо само в (3) и (4) да се направи следната формална замяна в означенията: $c.t = x^0$, $x = x^1$, $y = x^2$ и $z = x^3$, както и да се отчете, че $\frac{V}{c}=\beta$.

🕮 **Следствия от трансформациите на Лоренц:**

① **Относителност на пространствените интервали** (*скъсяване на дължините*):

✓ $l = l_0.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$, т.е. $l=\frac{l_0}{\gamma}$, където:

☞ l_0 - **собствена дължина** на обекта (*дължина в* $K^{/}$*, т.е. спрямо наблюдател, движещ се заедно с обекта и намиращ се в покой спрямо него*); и

☞ l - **координатна дължина** на обекта (*дължина в* K*, т.е. спрямо неподвижен наблюдател в* K*, относно който, обаче, обектът се движи*).

② **Относителност на временните интервали:**

✓ $\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, т.е. $\Delta t = \gamma.\Delta\tau$, където

☞ $\Delta t^{/} \approx \Delta\tau$ - собствено време в $K^{/}$;

☞ Δt - координатно време, определено за наблюдател *в* K, спрямо който обектът се движи.

Понеже при $V<c$ очевидно $\gamma>1$, то $\Delta t>\Delta\tau$, т.е. **координатното време** (*времето спрямо неподвижен наблюдател, относно който обектът се движи*) **е по-голямо от собственото време** (*времето спрямо наблюдател, който се движи заедно с обекта, но относно който обектът е в покой*).

③ **Относителност на едновременността**, т.е. две събития, които са едновременни относно дадена ИОС, са нееднoвременни относно всяка друга ИОС, движеща се със скорост $V \neq 0$ спрямо дадената ИОС.

✵ **Задача** (зад. 298/стр. 50) Дадено е уравнение на окръжност $x^{/2}+y^{/2}=R^2$ спрямо отправна система $K^{/}$. Да се получи уравнението на тази крива спрямо системата K. Да се даде релативистично тълкуване на получения резултат.

Решение:

За намирането на уравнението на тази крива в ОС K, ще приложим обратните трансформации на Лоренц, записани във вида

$$(1)\qquad \left| \begin{array}{l} x^{/} = \gamma.(x - V.t) \\ y^{/} = y \\ t^{/} = \gamma.\left(t - \dfrac{V}{c^2} x \right) \end{array} \right. .$$

След заместването на $x^{/}$ и $y^{/}$ в уравнението на кривата (*окръжност*) в $K^{/}$, получаваме

$$(2)\qquad [\gamma.(x - V.t)]^2 + y^2 = R^2 \qquad \Big| : R^2$$

$$(3)\qquad \frac{[\gamma.(x - V.t)]^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} + y^2 = R^2$$

В този си вид уравнение (3) е уравнение на елипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, за която двете полуоси имат големини съответно

(4а) $a = R\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \equiv f(V)$, и (4б) $b = R = const$.

Ако (*формално*) $V \to c$, то очевидно $a \to 0$. На този резултат може да се даде следната релативистична интерпретация: при високи (*релативистични*) скорости на движение линейните размери на материални обекти в направление на движението се редуцират (*скъсяват*). Линейните размери в направление, перпендикулярно по отношение на движението, обаче, не се променят. В нерелативистичния случай $V << c$ подобна редукция на линейните размери не се наблюдава (*тя е несъществена*).

Числена оценка (зад. 295): ако приложим този резултат за Земята, разглеждана като кълбо с радиус $R = 6{,}4.10^6\ m$, имащо скорост на движение $V = 30\ km/s = 3.10^4\ m/s$, то релативистичното „скъсяване” на земния диаметър в направление на движението на Земята при нейното движение около Слънцето ще бъде $\Delta D = 2.\Delta R = 2\left\{ R - R\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \right\} = \ldots = 6{,}4\ cm$.

✹ **Задача** (зад. 299/стр. 51) Да се докаже че трансформацията с уравнения

(1[а]) $x^{/} = x.ch\,\psi - c.t\,sh\,\psi$ и (1[б]) $t^{/} = t.ch\,\psi - \dfrac{x}{c} sh\,\psi$

запазва разстоянието (*интервала*) между две точки (*събития*) в пространство-времето.

Доказателство: по определение

$$S'^{2}_{12} = (ct_1^{/} - ct_2^{/})^2 - (x_1^{/} - x_2^{/})^2 = \{(ct_1.ch\,\psi - x_1.sh\,\psi) - (ct_2.ch\,\psi - x_2.sh\,\psi)\}^2 -$$

$$-\{(x_1.ch\,\psi - ct_1.sh\,\psi) - (x_2.ch\,\psi - ct_2.sh\,\psi)\}^2 =$$
$$= \{c(t_1 - t_2).ch\,\psi - (x_1 - x_2).sh\,\psi\}^2 - \{(x_1 - x_2).ch\,\psi - c(t_1 - t_2).sh\,\psi\}^2 =$$
$$= c^2(t_1 - t_2)^2.ch^2\,\psi - 2c(t_1 - t_2)(x_1 - x_2).sh\,\psi.ch\,\psi + (x_1 - x_2)^2 sh^2\,\psi -$$
$$-[(x_1 - x_2)^2 ch^2\,\psi - 2c(t_1 - t_2)(x_1 - x_2).sh\,\psi.ch\,\psi + c^2(t_1 - t_2)^2.sh^2\,\psi] =$$
$$= c^2(t_1 - t_2)^2.[ch^2\,\psi - sh^2\,\psi] - (x_1 - x_2)^2[ch^2\,\psi - sh^2\,\psi] =$$
$$= c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2,$$

понеже $ch^2\,\psi - sh^2\,\psi = 1$. И така, доказахме, че

$$S'^{\,2}_{12} = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \equiv S^2_{12},$$

с което доказахме инвариантността на пространствено-времения интервал S^2_{12}.

❋ **Задача:** да се изведат формули за релативистично преобразуване на скоростта за случая $\vec{V} \| O\vec{x}$.

Решение: скоростта на материална точка спрямо ИОС (*K*) е

$$(1) \qquad V_x = \frac{dx}{dt}; \qquad V_y = \frac{dy}{dt}; \qquad V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Скоростта на същата материална точка спрямо друга ИОС (K'), движеща се със скорост $\vec{V} \| O\vec{x}$, т.е. $\vec{V}(V,0,0)$ спрямо първата, е

$$(2) \qquad V_x' = \frac{dx'}{dt'}; \qquad V_y' = \frac{dy'}{dt'}; \qquad V_z' = \frac{dz'}{dt'}.$$

Съгласно формулите (*обратните преобразования*) на Лоренц за координатите имаме

$$(3) \quad \left| \begin{array}{l} x' = \gamma.(x - V.t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma.\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad (4) \quad \left| \begin{array}{l} dx' = \gamma.(dx - V.dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma.\left(dt - \dfrac{V}{c^2}dx\right) \end{array} \right. .$$

Замествайки (4) в (2), получаваме последователно

$$(5) \qquad V_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma.(dx - V.dt)}{\gamma.\left(dt - \dfrac{V}{c^2}dx\right)}\,\frac{/\,dt}{/\,dt} = \frac{(dx/dt) - V}{1 - \dfrac{V}{c^2}(dx/dt)} = \frac{V_x - V}{1 - V_x \dfrac{V}{c^2}};$$

$$(6) \qquad V_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma.\left(dt - \dfrac{V}{c^2}dx\right)}\,\frac{/\,dt}{/\,dt} = \frac{V_y}{\gamma.\left(1 - V_x \dfrac{V}{c^2}\right)}, \text{ и}$$

$$(7) \qquad V_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma.\left(dt - \dfrac{V}{c^2}dx\right)}\,\frac{/\,dt}{/\,dt} = \frac{V_z}{\gamma.\left(1 - V_x \dfrac{V}{c^2}\right)}.$$

**Допълнение*: с тези формули за трансформация на скоростта може да се аргументира (*математически*) принципът за инвариантност на скоростта на светлината, и по-конкретно факта, че тя не може да надвиши стойността „c". Действително, ако изходим от предпоставката $V_x \to c$, и $V_y = V_z = 0$, то съгласно изведените по-горе формули (5), (6) и (7) ще следва, че и $V_y^{/} = V_z^{/} = 0$, обаче

$$(8) \qquad V_x^{/} = \frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}} \to \frac{c - V}{1 - c\frac{V}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = \frac{c - V}{\left(\frac{c - V}{c}\right)} = c\,.$$

Така обосновахме, че при $V_x \to c$ е в сила и $V_x^{/} \to c$, к.т.д.

❋ **Задача:** да се изведат формули за релативистично преобразуване на ускорението за случая $\vec{V} \,||\, O\vec{x}$.

Решение: ускорението на материална точка (*по компоненти*) спрямо ИОС (K) е

$$(1) \qquad a_x = \frac{dV_x}{dt}; \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt}; \qquad a_z = \frac{dV_z}{dt}\,.$$

Ускорението на същата материална точка спрямо друга ИОС ($K^{/}$), движеща се със скорост $\vec{V} \,||\, O\vec{x}$, т.е. $\vec{V}(V,0,0)$ спрямо първата, е

$$(2) \qquad a_x^{/} = \frac{dV_x^{/}}{dt^{/}}; \qquad a_y^{/} = \frac{dV_y^{/}}{dt^{/}}; \qquad a_z^{/} = \frac{dV_z^{/}}{dt^{/}}\,.$$

Имаме вече доказани (*в предната задача*) следните формули за релативистично преобразуване на скоростите на материална точка:

$$(3) \qquad V_x^{/} = \frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}}; \qquad V_y^{/} = \frac{V_y}{\gamma.\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)}; \qquad V_z^{/} = \frac{V_z}{\gamma.\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)},$$

а за релативистичното трансформиране на безкрайно малкия интервал време отново можем да използваме преобразованието

$$(4) \qquad dt^{/} = \gamma.\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right).$$

Нека определим най-напред трансформационния закон на компонентата $a_x^{/} = \frac{dV_x^{/}}{dt^{/}}$ на ускорението. За целта ще е необходимо да определим $dV_x^{/}$ от (3):

$$(5) \qquad dV_x^{/} = d\left(\frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}}\right) = \frac{dV_x\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right) - (V_x - V)\left(-dV_x \frac{V}{c^2}\right)}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{dV_x - V_x dV_x \frac{V}{c^2} + V_x dV_x \frac{V}{c^2} - V dV_x \frac{V}{c^2}}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} = \frac{dV_x - V dV_x \frac{V}{c^2}}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} = \frac{dV_x\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2}, \text{ т.е.}$$

(6) $$dV_x^{/} = \frac{dV_x}{\gamma^2\left(1 - V_x\dfrac{V}{c^2}\right)^2}.$$

Замествайки (6) и (4) в (2), получаваме последователно

(7) $$a_x^{/} = \frac{dV_x^{/}}{dt^{/}} = \frac{dV_x}{\gamma^2\left(1 - V_x\dfrac{V}{c^2}\right)^2} \times \frac{1}{\gamma.\left(dt - \dfrac{V}{c^2}dx\right)}\frac{/\,dt}{/\,dt} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - V_x\dfrac{V}{c^2}\right)^3}.$$

И така доказахме трансформационния закон за компонентата $a_x^{/}$ на ускорението

(8) $$a_x^{/} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - V_x\dfrac{V}{c^2}\right)^3} \equiv \frac{a_x\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 - V_x\dfrac{V}{c^2}\right)^3}.$$

По аналогичен начин могат да бъдат определени трансформационните закони за $a_y^{/}$ и $a_z^{/}$.

❋ **Задача** (стр. 52/зад. 315) Два 4-вектора се наричат колинеарни, ако съответните им компоненти са пропорционални, т.е. ако

(1) $$\frac{A^0}{B^0} = \frac{A^1}{B^1} = \frac{A^2}{B^2} = \frac{A^3}{B^3} = k.$$

Да се докаже, че свойството колинеарност на два 4-вектора е инвариантно относно трансформациите на Лоренц.

Решение: за контравариантни 4-вектори преобразованията на Лоренц имат вида:

(2) $$\left| \begin{array}{l} A^{/\,0} = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A^{/\,1} = \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A^{/\,2} = A^2 \\ A^{/\,3} = A^3 \end{array} \right.$$ и (3) $$\left| \begin{array}{l} B^{/\,0} = \gamma(B^0 - \beta B^1) \\ B^{/\,1} = \gamma(B^1 - \beta B^0) \\ B^{/\,2} = B^2 \\ B^{/\,3} = B^3 \end{array} \right. .$$

С помощта на (2) и (3) получаваме последователно

(4) $$\frac{A^{/0}}{B^{/0}} = \frac{\gamma(A^0 - \beta A^1)}{\gamma(B^0 - \beta B^1)} = \frac{A^0 - \beta A^1}{B^0 - \beta B^1} = \frac{(kB^0) - \beta(kB^1)}{B^0 - \beta B^1} = k;$$

(5) $$\frac{A^{/1}}{B^{/1}} = \frac{\gamma(A^1 - \beta A^0)}{\gamma(B^1 - \beta B^0)} = \frac{A^1 - \beta A^0}{B^1 - \beta B^0} = \frac{(kB^1) - \beta(kB^0)}{B^1 - \beta B^0} = k;$$

(6) $$\frac{A^{/2}}{B^{/2}} = \frac{A^2}{B^2} = \frac{(kB^2)}{B^2} = k;$$ и

(7) $$\frac{A^{/3}}{B^{/3}} = \frac{A^3}{B^3} = \frac{(kB^3)}{B^3} = k.$$

С това доказахме всъщност, че

(8) $$\frac{A'^0}{B'^0}=\frac{A'^1}{B'^1}=\frac{A'^2}{B'^2}=\frac{A'^3}{B'^3}=k,$$

т.е. че 4-векторите A^μ и B^μ ($\mu=0,1,2,3$) са колинеарни както в K, така и в K', с което доказахме, че действително свойството „колинеарност” е инвариантно свойство за 4-вектори.

Тема: Релативистична електродинамика

❖ Теоретичен минимум

🕮 **4-скорост:** $u^\mu=\dfrac{dX^\mu}{d\tau}$, $\mu=0,1,2,3$, където

☞ $d\tau=dt\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ - собствено време,

☞ $X^\mu=(ct,\vec{r})$ - **4-радиус-вектор.**

✓ $u=(u^0,\vec{u})=\left(\dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}},\dfrac{\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right)$, ✓ $u^2=u_\mu u^\mu=c^2$.

🕮 **4-вектор „енергия-импулс” (4-импулс):**

✓ $P^\mu=m_0.u^\mu$, $\mu=0,1,2,3$ ✓ $P=(p^0,\vec{p})$,

✓ $P=\left(\dfrac{E}{c},\vec{p}\right)$, където ✓ $\vec{p}=\dfrac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}=\gamma.m_0\vec{V}$.

✓ $P^2=(P^0)^2-\vec{p}^2=\dfrac{E^2}{c^2}-\vec{p}^2=m_0^2c^2\equiv inv$ - скаларен квадрат.

✓ $E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}$.

🕮 **Енергия на релативистка частица**:

✓ $E=\dfrac{m_0.c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\gamma.m_0.c^2=\dfrac{E_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\gamma.E_0$, ✓ $E_0=m_0.c^2$.

✓ $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}=\gamma.m_0$ - **релативистична маса** на частица, **зависеща от скоростта** $\vec{v}$**,** с която тя се движи, а m_0 - маса в покой.

✓ $E=T+m_0c^2$**,** ✓ $T=E-m_0c^2=(\gamma-1)m_0c^2\equiv(\gamma-1)E_0$**.**

✓ **Сила на Лоренц:** $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=q\vec{E}+q.(\vec{V}\times\vec{B})$.

🕮 **Полезни съотношения**:

✓ $p=\dfrac{1}{c}\sqrt{T(T+2m_0c^2)}$;

✓ $\vec{v} = \dfrac{c\,\vec{p}}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}$;

✓ $v = c\sqrt{1 - \dfrac{m_0^2 c^4}{E^2}} = c\sqrt{1 - \dfrac{E_0^2}{E^2}}$

Енергия E_γ и импулс p_γ на γ-квант (*фотон*):

✓ $E_\gamma = \hbar\omega$, ✓ $p_\gamma = \dfrac{E_\gamma}{c} = \dfrac{\hbar\omega}{c} = \hbar k$ **.**

✹ **Задача:** Да се докаже представянето $E = m_0 c^2 + T$ **.**

Доказателство:

По определение:

(1) $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-x}}$,

където за удобство сме въвели обозначението $\dfrac{V^2}{c^2} = x$. Нека развием функцията $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ в ред на Тейлър в околност на т. $x_0 = 0$. Така $f(x)$ ще се представи във вида

(2) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$,

където $f^{(n)}(0)$ са стойностите на n-тата производна на функцията $f(x)$ в т. $x_0 = 0$. Нека определим поне първите две от тях:

$n = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0}} = 1;$

$n = 1 \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-x)^{3/2}}.(-1) = \dfrac{1}{2.(1-x)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = \dfrac{1}{2(1-0)^{3/2}} = \dfrac{1}{2}.$

Така очевидно получаваме

(3) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \dfrac{f^{(0)}(0)}{0!}\, x^0 + \dfrac{f^{(1)}(0)}{1!}\, x^1 + ... = 1 + \dfrac{1}{2}x + ... \approx 1 + \dfrac{1}{2}x$

С отчитането на (3) и на полагането $x = \dfrac{V^2}{c^2}$ изразът за енергията (1) добива вида

(4) $E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-x}} \approx m_0 c^2\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2 + m_0 c^2 \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2} = m_0 c^2 + \dfrac{m_0 v^2}{2} = m_0 c^2 + T$.

✹ **Задача:** Заряд q с маса в покой m_0 се намира в покой в началото на КС. Върху заряда действа постоянно електрично поле, насочено по оста Ох.

Определете релативистичната скорост и изразете координатите на заряда (*частицата*) като функция на времето.

Решение:

Начални условия (при $t=0$):

(1) $\vec{p}(0)=\vec{p}_0(0,0,0)$; $\vec{r}(0)=\vec{r}_0(0,0,0)$; $\vec{V}(0)=\vec{V}_0(0,0,0)$.

Полетата, действащи върху частицата, са

(2) $\vec{E}=(E,0,0)$, и (3) $\vec{B}=(0,0,0)$.

Тогава силата на Лоренц, действаща върху заряда, ще бъде

(4) $$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t}=q\,\vec{E}+q.(\vec{V}\times\vec{B}),$$

или по компоненти:

(5) $$\frac{d\,p_x}{d\,t}=q\,E\,; \qquad \frac{d\,p_y}{d\,t}=0\,; \qquad \frac{d\,p_z}{d\,t}=0\,.$$

След интегриране на ОДУ (5) с отчитане на началните условия (1) ще имаме:

(6) $p_x=q\,E.t$; $p_y=const\equiv 0$; $p_y=const\equiv 0$.

От друга страна релативисткият импулс се представя във вида (*по компоненти*):

(7) $p_x=\gamma_x.m_0.V_x$; $p_y=\gamma_y.m_0.V_y$; $p_z=\gamma_z.m_0.V_z$.

След сравняването на равенства (6) и (7) получаваме

(8) $\gamma_x.m_0.V_x=q\,E.t$; $V_y=0$; $V_z=0$.

Решаваме първото от тях относно V_x:

$$\frac{m_0.V_x}{\sqrt{1-\dfrac{V_x^{\,2}}{c^2}}}=q\,E.t\qquad\Big|^2 \qquad\qquad m_0^{\,2}.V_x^{\,2}=q^2\,E^2.t^2\left(1-\frac{V_x^{\,2}}{c^2}\right),$$

$$V_x^{\,2}\left(m_0^{\,2}+\frac{q^2\,E^2.t^2}{c^2}\right)=q^2\,E^2.t^2\,, \qquad V_x^{\,2}\left(m_0^{\,2}+\frac{q^2\,E^2.t^2}{c^2}\right)=q^2\,E^2.t^2\,,$$

$V_x^{\,2}(m_0^{\,2}c^2+q^2\,E^2.t^2)=q^2\,E^2.t^2c^2$, откъдето след коренуване получаваме

(9) $$V_x=\frac{dx}{dt}=q\,E.c.t\,(m_0^{\,2}c^2+q^2\,E^2.t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

като очевидно $\lim\limits_{t\to\infty}V_x(t)=c$, както би следвало и да се очаква. Интегрираме (9), което е ОДУ с разделящи се променливи

(10) $$x(t)=\int V_x(t)\,dt+C_1=\int q\,E.c.t\,(m_0^{\,2}c^2+q^2\,E^2.t^2)^{-\frac{1}{2}}dt+C_1=$$

$$=q\,E.c\int\frac{t}{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+q^2\,E^2.t^2}}dt+C_1=\frac{q\,E.c}{2}\int\frac{d\,t^2}{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2}}+C_1=$$

$$=\frac{q\,E.c}{2}.\frac{1}{(q\,E)^2}\int\frac{d\,(q\,E.t)^2}{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2}}+C_1=\frac{c}{2q\,E}\int[m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2]^{-\frac{1}{2}}\,d\,(q\,E.t)^2+C_1=$$

$$=\frac{c}{2q\,E}\,\frac{1}{1/2}[m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2]^{+\frac{1}{2}}+C_1=\frac{c}{q\,E}\,\sqrt{m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2}+C_1=$$

$$=\frac{c}{q\,E}\left\{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+(q\,E.t)^2}+C_1^{/}\right\}.$$

И така

(11) $x(t)=\dfrac{c}{qE}\left\{\sqrt{m_0{}^2c^2+(qE.t)^2}+C_1^{/}\right\}$,

където интеграционната константа $C_1^{/}$ се определя от началните условия (1), а именно: щом $x(0)=\dfrac{c}{qE}\left\{\sqrt{m_0{}^2c^2}+C_1^{/}\right\}=\dfrac{c}{qE}\left\{m_0c+C_1^{/}\right\}\equiv 0$, то очевидно $C_1^{/}=-m_0c$, откъдето следва

(12) $x(t)=\dfrac{c}{qE}\left\{\sqrt{m_0{}^2c^2+(qE.t)^2}-m_0c\right\}$.

От уравнения (8) и от началните условия (1) получаваме още, че

(13) $y(t)=0$, и $z(t)=0$.

✵ **Задача** (зад. 320/стр. 52) Коя от величините за частица с маса в покой m_0 е най-голяма:

а) $\dfrac{m_0V^2}{2}$; б) $\dfrac{p^2}{2m_0}$; в) T (*кинетична енергия*)

Решение:

Нека изразим всяка една от трите величини посредством релативистичния фактор $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ и енергията на частицата в покой $E_0=m_0c^2$:

а) По определение $E=\dfrac{m_0.c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\dfrac{E_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, следователно

(1) $E^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)=E_0{}^2$.

Ако отчетем още, че всъщност $E=\gamma.E_0$, то (1) добива вида

(2) $\gamma^2E_0{}^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)=E_0{}^2$, откъдето $\gamma^2\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)=1$, $\gamma^2-\gamma^2\dfrac{V^2}{c^2}=1$,

$\gamma^2\dfrac{V^2}{c^2}=\gamma^2-1$, т.е. $V^2=\dfrac{\gamma^2-1}{\gamma^2}c^2$. С така намерената стойност на V^2 можем да определим величината

(3) $\dfrac{m_0V^2}{2}=\dfrac{m_0}{2}V^2=\dfrac{\gamma^2-1}{2\gamma^2}m_0c^2\equiv\dfrac{\gamma^2-1}{2\gamma^2}E_0=\dfrac{(\gamma-1).(\gamma+1)}{2\gamma^2}E_0$.

б) Величината $\dfrac{p^2}{2m_0}$ ще изразим от условието за инвариантност на квадрата на 4-импулса:

(4) $\left(\dfrac{E}{c}\right)^2-p^2=m_0^2c^2$,

откъдето

$$p^2=\left(\frac{E}{c}\right)^2-m_0^2c^2=\left(\frac{\gamma m_0c^2}{c}\right)^2-m_0^2c^2=(\gamma m_0c)^2-m_0^2c^2=\gamma^2m_0^2c^2-m_0^2c^2=(\gamma^2-1)m_0^2c^2.$$

Тогава

(5) $\dfrac{p^2}{2m_0} = \dfrac{1}{2m_0} p^2 = \dfrac{1}{2m_0}(\gamma^2 - 1) m_0^2 c^2 = \dfrac{(\gamma^2 - 1)}{2} m_0 c^2 \equiv \dfrac{(\gamma^2 - 1)}{2} E_0$.

в) Накрая изразяваме и кинетичната енергия T посредством E_0, като за тази цел използваме представянето

(6) $E = T + m_0 c^2$,

откъдето, отчитайки отново че $E = \gamma . m_0 c^2$, следва

(7) $T = E - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \equiv (\gamma - 1) E_0$.

И така дотук имаме:

(8.1) $\dfrac{m_0 V^2}{2} = \dfrac{(\gamma - 1).(\gamma + 1)}{2\gamma^2} E_0$;

(8.2) $\dfrac{p^2}{2m_0} = \dfrac{(\gamma - 1).(\gamma + 1)}{2} E_0$, и

(8.3) $T = (\gamma - 1) E_0$.

От (8.1) и (8.2), с отчитане на (8.3), имаме

(9.1) $\dfrac{m_0 V^2}{2} = \dfrac{(\gamma + 1)}{2\gamma^2} T$; и (9.2) $\dfrac{p^2}{2m_0} = \dfrac{(\gamma + 1)}{2} T$.

Понеже релативистичният фактор $\gamma > 1$, то съгласно (9.2)

(10) $\dfrac{p^2}{2m_0} > T$.

А ако отчетем (9.2) в (9.1), ще получим

(11) $\dfrac{m_0 V^2}{2} = \dfrac{1}{\gamma^2}\left(\dfrac{p^2}{2m_0}\right)$,

което при $\gamma > 1$ означава, че

(12) $\dfrac{m_0 V^2}{2} < \dfrac{p^2}{2m_0}$.

От (10) и (12) заключаваме, че най-голямата измежду трите величини е $\dfrac{p^2}{2m_0}$.

При тези обстоятелства от (9.1) можем да заключим, че $\dfrac{m_0 V^2}{2}$ е най-малката.

✵ **Задача** (зад. 322/стр. 52) Изразете големината p на импулса на една релативистка частица посредством кинетичната й енергия T.

Решение:

За решаването на задачата е достатъчно да използваме инвариантността на скаларния квадрат на 4-импулса

(1) $\left(\dfrac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2$,

както и формулата за пълната енергия

(2) $E = T + m_0 c^2$.

Заместваме (2) в (1)

(3) $$\left(\frac{T+m_0 c^2}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2 \qquad \Big| .c^2$$

(4) $(T+m_0 c^2)^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$, откъдето

$$p^2 c^2 = (T+m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4 = T^2 + 2.T.m_0 c^2 + m_0^2 c^4 - m_0^2 c^4 = T^2 + 2.T.m_0 c^2 = T(T+2.m_0 c^2).$$

След разделяне с c^2 и коренуване получаваме точно

(5) $$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2.m_0 c^2)},$$

което представлява търсената зависимост.

✵ **Задача** (зад. 323/стр. 52) Изразете скоростта $\vec{V}$ на една релативистка частица посредством нейния импулс $\vec{p}$.

Решение:

Отново използваме формулата, изразяваща инвариантността на скаларния квадрат на 4-импулса

(1) $$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2,$$

и формулата за пълната енергия, записана този път, обаче, в стандартната релативистична форма

(2) $$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Заместваме E от (2) в (1) и решаваме така полученото уравнение относно скоростта $\vec{V}$:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2, \Rightarrow \frac{m_0{}^2 c^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} - p^2 = m_0^2 c^2, \Rightarrow \frac{m_0{}^2 c^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} = p^2 + m_0^2 c^2,$$

$$1-\frac{V^2}{c^2} = \frac{m_0{}^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}, \Rightarrow \frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0{}^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}, \Rightarrow V^2 = \frac{p^2 + m_0^2 c^2 - m_0{}^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}.c^2,$$

$V^2 = \dfrac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}.c^2$, откъдето заключаваме, че

(3) $$\vec{V} = \frac{\vec{p}.c}{\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}}.$$

✵ **Задача** (зад. 324/стр. 52) Изразете скоростта V на една релативистка частица посредством нейната релативистична енергия E.

Решение:

По определение

(1) $$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad \Big|^2, \quad \Rightarrow \quad E^2 = \frac{m_0{}^2 c^4}{1-\frac{V^2}{c^2}}, \Rightarrow \quad 1-\frac{V^2}{c^2} = \frac{m_0{}^2 c^4}{E^2},$$

$$\frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0{}^2 c^4}{E^2}, \qquad \Rightarrow \qquad V^2 = \left(1 - \frac{m_0{}^2 c^4}{E^2}\right) c^2$$, откъдето след коренуване

(2) $$V = c.\sqrt{1 - \frac{m_0{}^2 c^4}{E^2}} = c.\sqrt{1 - \frac{E_0{}^2}{E^2}}\ .$$

✵ **Задача:** Върху намираща се в покой частица, имаща маса m_1 (маса в покой) пада друга (*втора*) частица с маса m_2 (маса в покой), в резултат от което се образува нова частица с маса M ($M > m_1 + m_2$). Да се определи минималната кинетична енергия $T_2^{\min}$ на втората частица, достатъчна за осъществяването на такъв процес.

Решение:

За решаването на задачата ще използваме следните основни формули от релативистката динамика:

(Ф.1) $$P^2 = P^{/\,2},$$

където $P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ и $P^{/} = \left(\frac{E^{/}}{c}, \vec{p}^{\,/}\right)$ са стойностите на 4-импулса на системата в две различни координатни системи K и $K^{/}$, използвани за описанието на системата преди и след взаимодействието съответно;

(Ф.2) $$E = T + m_0 c^2;$$

(Ф.3) $$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2m_0 c^2)};$$

Нека най-напред разгледаме стълкновението на частиците в лабораторна КС (K). За енергиите и импулсите на двете частици имаме съответно

(1) $E_1 = m_1 c^2$ (*енергия на частица в покой*);

(2) $p_1 = 0$; и

(3) $E_2 = T_2 + m_2 c^2$;

(4) $$p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{T_2(T_2 + 2m_2 c^2)}\ .$$

Пълната енергия и пълният импулс на системата до удара е:

(5) $E = E_1 + E_2 = (m_1 + m_2).c^2 + T_2$;

(6) $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \equiv \vec{p}_2$.

Тогава пълният 4-вектор на импулса на системата е

(7) $$P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{(m_1 + m_2).c^2 + T_2}{c}, \vec{p}_2\right),$$

чийто скаларен квадрат е

(8) $$P^2 = \left(\frac{(m_1 + m_2).c^2 + T_2}{c}\right)^2 - p_2{}^2 = \frac{1}{c^2}[(m_1 + m_2).c^2 + T_2]^2 - p_2{}^2\ .$$

Същия кинематичен анализ на системата провеждаме и след взаимодействието на частиците, но този път го реализираме спрямо КС ($K^{/}$), свързана с центъра на масите на частиците.

При това следва да вземем под внимание и обстоятелството, че под минимална кинетична енергия $T_2^{\min}$ на втората частица се разбира такава енергия, при която новообразувалата се частица с маса M само ще се „композира”, без да притежава каквато и да е кинетична енергия, т.е. енергията и импулса на системата (*частицата*) след удара ще бъдат съответно

(9) $E^{/} = M.c^2$ (*енергия на частица в покой*).; и (10) $\vec{p}^{/} = 0$ (*частица в покой*).

Тогава 4-импулса в системата $K^{/}$ ще бъде

(10) $$P^{/} = \left(\frac{E^{/}}{c}, \vec{p}^{/}\right) = \left(\frac{M.c^2}{c}, 0\right),$$

а неговият скаларен квадрат ще бъде

(11) $$P^{/2} = \left(\frac{M.c^2}{c}\right)^2 - 0 \equiv M^2.c^2.$$

Остана да приложим (Ф.1), изразяваща инвариантността на квадрата на 4-импулса, а именно отчитайки (8) и (11), и с уговорката че $T_2 \to T_2^{\min}$ ще имаме

(12) $$\frac{1}{c^2}[(m_1 + m_2).c^2 + T_2^{\min}]^2 - p_2{}^2 = M^2.c^2 \qquad \Big| .c^2$$

(13) $$[(m_1 + m_2).c^2 + T_2^{\min}]^2 - p_2{}^2.c^2 = M^2.c^4$$

Ако в (13) заместим p_2 от (4) (*отново с уговорката че* $T_2 \to T_2^{\min}$), ще имаме

(14) $$[(m_1 + m_2).c^2 + T_2^{\min}]^2 - c^2\frac{1}{c^2}[T_2^{\min}(T_2^{\min} + 2m_2c^2)] = M^2.c^4.$$

Решаваме горното уравнение относно $T_2^{\min}$:

$$(m_1 + m_2)^2.c^4 + 2(m_1 + m_2).c^2T_2^{\min} + \{T_2^{\min}\}^2 - \{T_2^{\min}\}^2 - 2T_2^{\min}m_2c^2 = M^2.c^4;$$

$$(m_1 + m_2)^2.c^4 + 2m_1.c^2T_2^{\min} = M^2.c^4;$$

$$2m_1.c^2T_2^{\min} = M^2.c^4 - (m_1 + m_2)^2.c^4.$$

И така

(15) $$T_2^{\min} = \frac{\{M^2 - (m_1 + m_2)^2\}}{2m_1}.c^2.$$

Понеже по условие $M > m_1 + m_2$, то очевидно $T_2^{\min} > 0$. А ако $T_2 > T_2^{\min}$, то частицата, образувана след взаимодействието, няма да остане в покой, а ще започне да се движи със някаква (*различна от нула*) скорост.

Тема: 4-тензор на електромагнитното поле. Уравнение на електромагнитното поле в ковариантна форма. Уравнения на Максуел.

❖ Теоретичен минимум

🕮 **4-потенциал**: $A^{\mu} = (A^0, \vec{A})$, или още $A^{\mu} = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$, където:

- ☞ φ **- скаларен потенциал на ЕМ поле;**
- ☞ $\vec{A}$ **- магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.**

✓ **Интензитет на електричното поле:** $\vec{E} = -\,grad\ \varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

✓ **Индукция на магнитното поле:** $\vec{B} = rot\ \vec{A}$.

🕮 **Антисиметричен 4-тензор на ЕМ поле** $F_{\mu\nu}$:

✓ $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, като очевидно $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$.

✓ $$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix};$$

✓ $$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

🕮 **Обемна плътност на точков(и) заряд(и)**:

✓ $\rho_a = q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$,

✓ $\rho = \sum\limits_a q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \equiv \sum\limits_a \rho_a$ - за система от точкови заряди

🕮 **4-вектор на плътността на тока**:

✓ $j^\mu = \rho \dfrac{dx^\mu}{dt}$, за $\mu = 0, 1, 2, 3$.

✓ $j^\mu = (\rho.c, \vec{j})$.

☞ $\vec{j}_a = q_a \vec{V}_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ - „ток”, обусловен от **един точков заряд**;

☞ $\vec{j} = \sum\limits_a \vec{j}_a = \sum\limits_a q_a \vec{V}_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ - ток на **с-ма от точкови заряди.**

🕮 **Уравнение за непрекъснатостта в диференциална форма**:

✓ $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \vec{j} = 0$,

или още в **4-мерна форма**, записано чрез **векторна** 4-**дивергенция**, приложена над 4-вектора на плътността на тока

✓ $\dfrac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$, за $\mu = 0, 1, 2, 3$.

🕮 **Уравнение на електромагнитното поле в ковариантна форма.**

✓ $\dfrac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \mu_0\, j^\nu$, за $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$,

където $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 . c^2}$ **- магнитна константа.**

🕮 **Тримерна форма на уравненията на Максуел**

Уравненията

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{array}\right.$$

са уравнения на електромагнитното поле в **тримерна форма**. Те се наричат **уравнения на Максуел**.

🕮 **Енергия на ЕМ поле**

✓ $W = \int\limits_{V_\infty}\left(\dfrac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)dV$ - **енергия на ЕМ поле** в цялото пространство.

✓ $w = \dfrac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$ **- обемна плътност на енергията на ЕМ поле,**

✓ $w_E = \dfrac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}$, и ✓ $w_M = \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$.

✓ $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$ **- вектор на Умов-Пойтинг.**

✷ **Задача**: **Да се определят** (*в явен вид*) **компонентите на 4-тензора на електромагнитното поле** $F_{\mu\nu}$**.**

Решение:

4-тензорът $F_{\mu\nu}$, наречен **<u>тензор на електромагнитното поле</u>**, има компоненти, които се изразяват чрез компонентите на ковариантния 4-потенциал A_μ и тези на контравариантния 4-радиус-вектор X^μ посредством съотношението

(1) $\boxed{F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}$, за $\mu,\nu = 0,1,2,3$.

Нека припомним, че:

☞ **4-радиус-векторът** X^μ е 4-вектор с компоненти

(2) $X \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$;

☞ **4-потенциалът** A^μ е 4-вектор, който се изразява посредством **скаларния** φ и **векторния** $\vec{A}$ **потенциали** във вида

(3^A) $A^\mu = \left(\dfrac{\varphi}{c}, \vec{A}\right) \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left(\dfrac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$ - контравариантна форма; и

(3^B) $A_\mu = \left(\dfrac{\varphi}{c}, -\vec{A}\right) \equiv (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = \left(\dfrac{\varphi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z\right)$ - ковариантна форма.

Чрез потенциалите φ и $\vec{A}$ се изразяват и **полевите вектори** $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (*векторите на електромагнитното поле*), а именно:

(*) $\vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\ \varphi(\vec{r},t)$, т.е.

(4) $\boxed{E_x = -\dfrac{\partial A_x}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}$, $\boxed{E_y = -\dfrac{\partial A_y}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}$, $\boxed{E_z = -\dfrac{\partial A_z}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}$,

и

(**) $\vec{B}(\vec{r},t) = rot\ \vec{A}(\vec{r},t) \equiv \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$, т.е.

(5) $\boxed{B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}}$, $\boxed{B_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}}$, $\boxed{B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}}$.

Нека отбележим, че $F_{\mu\nu}$ е **<u>антисиметричен тензор</u>**, т.е. $\boxed{F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}}$, като очевидно $F_{kk} = 0$, и трябва следователно да притежава **матрично представяне** от вида

$$(6) \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нека припомним още, че в алгебрата на тензорите се използват т.нар. операции „**сваляне**" и „**качване**" на индекс(и), като се следва едно общо **<u>правило</u>**: когато индексът е „0" (*т.е. **временен** индекс*), знакът на компонентата на тензора **не се променя**, <u>обаче</u> когато индексът е 1, 2 или 3 (*т.е. **пространствен** индекс*), то знакът на компонентата на тензора **се променя**. От казаното следва, че когато операциите „**сваляне**" и „**качване**" на индекси се прилага едновременно и за двата индекса на 4-тензор, то:

- ако те са в комбинация „*временен+пространствен*", знакът се мени;
- ако те са в комбинация „*пространствен+пространствен*", знакът не се променя.

След всичко казано дотук можем да намерим компонентите на 4-тензора на електромагнитното поле с помощта на (1):

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \frac{\partial(-A_x)}{\partial(c.t)} - \frac{\partial(\varphi/c)}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \ldots \text{ от } (*) \ldots = \frac{1}{c}E_x = \frac{E_x}{c}, \text{ т.е.}$$

$\boxed{F_{01} = \dfrac{E_x}{c}}$.

По аналогичен начин се доказва, че $\boxed{F_{02} = \dfrac{E_y}{c}}$ и $\boxed{F_{03} = \dfrac{E_z}{c}}$.

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \ldots \text{ от } (**) \ldots = -B_z \equiv -(rot\,\vec{A})_z,$$

т.е. $\boxed{F_{12} = -B_z}$.

Аналогично определяме още

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = \frac{\partial(-A_z)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial z} = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \ \dots \text{ от (**) } \dots \ = B_y \equiv (rot\,\vec{A})_y \,,$$

т.е. $\boxed{F_{13} = B_y}$.

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = \frac{\partial(-A_z)}{\partial y} - \frac{\partial(-A_y)}{\partial z} = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = \dots \text{ от (**) } \dots = -B_x \equiv -(rot\,\vec{A})_x \,,$$

т.е. $\boxed{F_{23} = -B_x}$.

И така, определихме всичките 6 на брой **независими** компоненти на **антисиметричния** 4-тензор на ЕМ. Останалите 6 се получават от правилото за антисиметричност $\boxed{F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}}$, а четирите елемента по главния диагонал са **равни на нула** (*свойство на антисиметричните тензори*). Следователно ковариантният 4-тензор на ЕМ може да се запише в следния **явен вид**

$$(7) \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощта на правилата за „вдигане” на индекси 4-тензорът на ЕМ поле може да бъде записан и в следната контравариантна форма

$$(8) \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

или накратко $F_{\mu\nu} = \left(\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right)$ и $F^{\mu\nu} = \left(-\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right)$.

От (7) и (8) се вижда, че компонентите на векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се явяват компоненти на 4-тензора на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$.

✸ **Задача**: Да се определят трансформационните закони за 6-те независими компоненти на антисиметричен 4-тензор $\Phi^{\mu\nu}$ в контравариантен запис.

Решение: ще докажем, че

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} \Phi^{01} = \Phi'^{01} \\ \Phi^{02} = \gamma[\Phi'^{02} + \beta.\Phi'^{12}] \\ \Phi^{03} = \gamma[\Phi'^{03} + \beta.\Phi'^{13}] \\ \Phi^{12} = \gamma[\Phi'^{12} + \beta.\Phi'^{02}] \\ \Phi^{13} = \gamma[\Phi'^{13} + \beta.\Phi'^{03}] \\ \Phi^{23} = \Phi'^{23} \end{array} \right. \qquad \text{където } \Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} & \Phi^{12} & \Phi^{13} \\ \Phi^{20} & \Phi^{21} & \Phi^{22} & \Phi^{23} \\ \Phi^{30} & \Phi^{31} & \Phi^{32} & \Phi^{33} \end{pmatrix},$$

*Първият индекс е индекс на реда, а вторият – на стълба..

За извеждането на тези трансформационни закони се приема (*използва*), че при смяна на ИОС всяка контравариантна компонента на $\Phi^{\mu\nu}$ се трансформира така, както се трансформира произведението от компоненти на два контравариантни 4-вектора. А както е известно трансформациите на Лоренц за контравариантен 4-вектор се дават с равенствата

$$\begin{vmatrix} x^0 = \gamma(x'^0 + \beta . x'^1) \\ x^1 = \gamma(x'^1 + \beta . x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{vmatrix}, \quad \text{където } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \text{ и } \beta = \frac{V}{c}.$$

Така можем да получим последователно

$$\Phi^{01} \to x^0 x^1 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] =$$
$$= \gamma^2 [x'^0 x'^1 + x'^0 \beta . x'^0 + \beta . x'^1 x'^1 + \beta . x'^1 . \beta . x'^0] \to \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta . \Phi'^{00} + \beta . \Phi'^{11} + \beta^2 . \Phi'^{10}] = \ldots$$

….. но за антисиметричен тензор $\Phi^{00} = \Phi^{11} = 0$, и още $\Phi^{10} = -\Phi^{01}$ …….

$$= \gamma^2 [\Phi'^{01} - \beta^2 . \Phi'^{01}] = \Phi'^{01} \gamma^2 [1-\beta^2] = \Phi'^{01} \left[\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \right]^2 \left[1 - \frac{V}{c} \right]^2 \equiv \Phi'^{01}.$$

$$\Phi^{02} \to x^0 x^2 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot x'^2 = \gamma [x'^0 \cdot x'^2 + \beta . x'^1 \cdot x'^2] \to \gamma [\Phi'^{02} + \beta . \Phi'^{12}].$$

$$\Phi^{03} \to x^0 x^3 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot x'^3 = \gamma [x'^0 \cdot x'^3 + \beta . x'^1 \cdot x'^3] \to \gamma [\Phi'^{03} + \beta . \Phi'^{13}].$$

$$\Phi^{12} \to x^1 x^2 = [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] \cdot x'^2 = \gamma [x'^1 \cdot x'^2 + \beta . x'^0 \cdot x'^2] \to \gamma [\Phi'^{12} + \beta . \Phi'^{02}].$$

$$\Phi^{13} \to x^1 x^3 = [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] \cdot x'^3 = \gamma [x'^1 \cdot x'^3 + \beta . x'^0 \cdot x'^3] \to \gamma [\Phi'^{13} + \beta . \Phi'^{03}].$$

$$\Phi^{23} \to x^2 x^3 = x'^2 \cdot x'^3 \to \Phi'^{23}.$$

✸ **Задача**: Да се определят трансформационните закони за компонентите на симетричен 4-тензор $\Phi^{\mu\nu}$ в контравариантен запис.

Решение:

За извеждането на трансформационните закони за 10-те независими компоненти на симетричен четиритензор $\Phi^{\mu\nu} = \Phi^{\nu\mu}$ отново използваме, че при смяна на ИОС всяка контравариантна компонента на $\Phi^{\mu\nu}$ се трансформира така, както се трансформира произведението от компоненти на два контравариантни 4-вектора. Така получаваме последователно:

☞ $\Phi^{00} \to x^0 x^0 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] =$
$$= \gamma^2 (x'^0 x'^0 + 2\beta . x'^0 x'^1 + \beta^2 x'^1 x'^1) \to \gamma^2 (\Phi'^{00} + 2\beta . \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{11});$$

☞ $\Phi^{01} \to x^0 x^1 = [\gamma(x'^0 + \beta . x'^1)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] =$
$$= \gamma^2 [x'^0 x'^1 + x'^0 \beta x'^0 + \beta x'^1 x'^1 + \beta x'^1 . \beta x'^0] \to \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta \Phi'^{00} + \beta \Phi'^{11} + \beta^2 \Phi'^{10}] =$$

… *за симетричен тензор* $\Phi^{10} = \Phi^{01}$ …

$$= \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{01} + \beta \Phi'^{00} + \beta \Phi'^{11}] = \gamma^2 [(1+\beta^2) \Phi'^{01} + \beta (\Phi'^{00} + \Phi'^{11})].$$

☞ $\Phi^{02} \to x^0 x^2 = [\gamma(x'^0 + \beta x'^1)] \cdot x'^2 = \gamma [x'^{01} \cdot x'^2 + \beta x'^1 \cdot x'^2] \to \gamma [\Phi'^{02} + \beta \Phi'^{12}].$

☞ $\Phi^{03} \to x^0 x^3 = [\gamma(x'^0 + \beta x'^1)] \cdot x'^3 = \gamma[x'^0 \cdot x'^3 + \beta x'^1 \cdot x'^3] \to \gamma[\Phi'^{03} + \beta \Phi'^{13}]$.

☞ $\Phi^{11} \to x^1 x^1 = [\gamma(x'^1 + \beta . x'^0)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] =$
$= \gamma^2 [x'^1 \cdot x'^1 + \beta x'^1 \cdot x'^0 + \beta x'^0 \cdot x'^1 + \beta^2 x'^0 \cdot x'^0] \to$
$\to \gamma^2 [\Phi'^{11} + \beta \Phi'^{10} + \beta \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{00}] = \gamma^2 [\Phi'^{11} + 2\beta \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{00}]$.

☞ $\Phi^{12} \to x^1 x^2 = [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] \cdot x'^2 = \gamma[x'^1 \cdot x'^2 + \beta x'^0 \cdot x'^2] \to \gamma[\Phi'^{12} + \beta \Phi'^{02}]$.

☞ $\Phi^{13} \to x^1 x^3 = [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] \cdot x'^3 = \gamma[x'^1 \cdot x'^3 + \beta x'^0 \cdot x'^3] \to \gamma[\Phi'^{13} + \beta . \Phi'^{03}]$.

☞ $\Phi^{22} \to x^2 x^2 = x'^2 \cdot x'^2 \to \Phi'^{22}$

☞ $\Phi^{23} \to x^2 x^3 = x'^2 \cdot x'^3 \to \Phi'^{23}$.

☞ $\Phi^{33} \to x^3 x^3 = x'^3 \cdot x'^3 \to \Phi'^{33}$.

✸ **Задача** Да се определят трансформационните закони за скаларния φ и векторния $\vec{A}$ потенциали.

Решение: нека за целта приложим законите за лоренцовите трансформации на 4-вектор

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
A^0 &= \gamma(A'^0 + \beta A'^1); \\
A^1 &= \gamma(A'^1 + \beta A'^0); \\
A^2 &= A'^2; \\
A^3 &= A'^3.
\end{aligned}
$$

спрямо компонентите на 4-потенциала $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, където

☞ $A^0 = \dfrac{\varphi}{c}$, където φ **- скаларен потенциал на ЕМ поле**;

☞ $\vec{A}$ **- магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.**

Така получаваме последователно:

(2.а) $\dfrac{\varphi}{c} = \gamma\left(\dfrac{\varphi'}{c} + \dfrac{V}{c} A'_x\right)$, т.е. $\varphi = \dfrac{\varphi' + V A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$,

(2.б) $A_x = \gamma\left(A'_x + \dfrac{V}{c}\dfrac{\varphi'}{c}\right)$, т.е. $A_x = \dfrac{A'_x + \dfrac{V}{c^2}\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$,

(2.в) $A_y = A'_y$, и

(2.г) $A_z = A'_z$.

Чрез формална замяна на „примовани” с „непримовани” величини, както и на V със $-V$ се получават и „обратните” преобразования за потенциалите.

✸ **Задача:** да се определят трансформационните закони за 4-вектора на плътността на тока.

Решение: по определение този 4-вектор се изразява посредством обемната плътност на електричните заряди ρ и 4-радиус-вектора X^{μ} с равенството

(1) $$j^{\mu} = \rho \frac{dX^{\mu}}{dt},$$

или още в следния явен вид

(2) $$j^{\mu} = (\rho.c,\ \vec{j}\,),$$

където $\vec{j} = \rho.\vec{V}$ е класическият (*тримерен*) вектор на плътността на тока, имащ компоненти $\vec{j}\,(\rho.V_x,\ \rho.V_y,\ \rho.V_z)$.

Нека за целта приложим законите за лоренцови трансформации на 4-вектор

(2) $$\begin{aligned} A^0 &= \gamma(A'^{\,0} + \beta A'^{\,1}); \\ A^1 &= \gamma(A'^{\,1} + \beta A'^{\,0}); \\ A^2 &= A'^{\,2}; \\ A^3 &= A'^{\,3}. \end{aligned}$$

спрямо компонентите на 4-вектора на плътността на тока $j^{\mu} = (\rho.c,\ \vec{j}\,)$. Така получаваме последователно:

(3.а) $$\rho.c = \gamma\left(\rho'.c + \frac{V}{c} j'_x\right), \quad \text{т.е.} \quad \rho = \frac{\rho' + \dfrac{V}{c^2} j'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

(3.б) $$j_x = \gamma\left(j'_x + \frac{V}{c}(\rho'.c)\right), \quad \text{т.е.} \quad j_x = \frac{j'_x + V.\rho'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

(3.в) $$j_y = j'_y, \quad \text{и}$$

(3.г) $$j_z = j'_z.$$

Чрез формална замяна на „примовани” с „непримовани” величини, както и на V със $-V$ се получават и „обратните” преобразования за този 4-вектор.

✸ **Задача**: да се определят трансформационните закони при преобразование на Лоренц за векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Решение: както вече бе споменато, трансформационните закони за векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ могат да бъдат получени с помощта на трансформационни закони на 4-тензори. Тъй като компонентите на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ участват в 4-тензора на електромагнитното поле, логично е да се опитаме да получим трансформациите на Лоренц за векторите на полето с помощта на трансформационните закони за антисиметричния 4-тензор на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$.

Ще използваме получените вече (*в предишна задача*) трансформационни закони за 6-те независими компоненти на антисиметричен 4-тензор $F^{\mu\nu}$ в контравариантен запис:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} F^{01}=F^{/\,01} \\ F^{02}=\gamma[F^{/\,02}+\beta.F^{/\,12}] \\ F^{03}=\gamma[F^{/\,03}+\beta.F^{/\,13}] \\ F^{12}=\gamma[F^{/\,12}+\beta.F^{/\,02}] \\ F^{13}=\gamma[F^{/\,13}+\beta.F^{/\,03}] \\ F^{23}=F^{/\,23} \end{array}\right.$$

където $F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix}$,

като първият индекс е индекс на реда, а вторият – на стълба.

Ако вземем под внимание, че

$$(2)\, F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \text{ и } F^{/\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x^{/}/c & -E_y^{/}/c & -E_z^{/}/c \\ E_x^{/}/c & 0 & -B_z^{/} & B_y^{/} \\ E_y^{/}/c & B_z^{/} & 0 & -B_x^{/} \\ E_z^{/}/c & -B_y^{/} & B_x^{/} & 0 \end{pmatrix},$$

то от 6-те трансформационни закона (1) се получават следните 6 равенствата

❶ $F^{01}=F^{/\,01} \;\Rightarrow\; E_x/c=E_x^{/}/c$, т.е.

(3) $\boxed{E_x=E^{/}{}_x}$.

❷ $F^{02}=\gamma[F^{/\,02}+\beta.F^{/\,12}] \;\Rightarrow\; -\dfrac{E_y}{c}=\gamma\left\{\left[-\dfrac{E^{/}{}_y}{c}\right]+\dfrac{V}{c}.[-B^{/}{}_z]\right\} \quad \Big|\cdot(-c)$, т.е.

(4) $\boxed{E_y=\gamma\,(E^{/}{}_y+V.B^{/}{}_z)}$.

❸ $F^{03}=\gamma[F^{/\,03}+\beta.F^{/\,13}] \;\Rightarrow\; -\dfrac{E_z}{c}=\gamma\left\{\left[-\dfrac{E^{/}{}_z}{c}\right]+\dfrac{V}{c}.B^{/}{}_y\right\} \quad \Big|\cdot(-c)$, т.е.

(5) $\boxed{E_z=\gamma\,(E^{/}{}_z-V.B^{/}{}_y)}$.

❹ $F^{12}=\gamma[F^{/\,12}+\beta.F^{/\,02}] \;\Rightarrow\; -B_z=\gamma\left\{-B^{/}{}_z+\dfrac{V}{c}.\left[-\dfrac{E^{/}{}_y}{c}\right]\right\} \quad \Big|\cdot(-1)$, т.е.

(6) $\boxed{B_z=\gamma\left\{B^{/}{}_z+\dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_y\right\}}$.

❺ $F^{13}=\gamma[F^{/\,13}+\beta.F^{/\,03}] \;\Rightarrow\; B_y=\gamma\left\{B^{/}{}_y+\dfrac{V}{c}\left[-\dfrac{E^{/}{}_z}{c}\right]\right\}$, т.е.

(7) $\boxed{B_y=\gamma\left\{B^{/}{}_y-\dfrac{V}{c^2}.E^{/}{}_z\right\}}$.

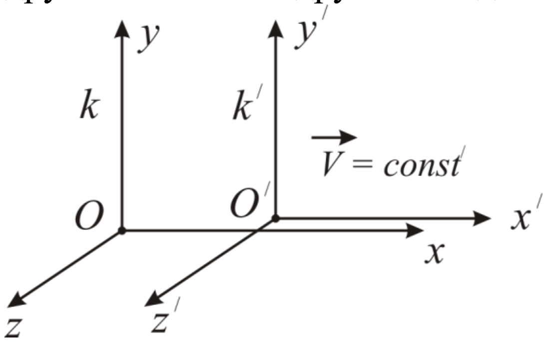
❻ $F^{23}=F^{/\,23} \;\Rightarrow\; -B_x=-B^{/}{}_x$, т.е.

(8) $\boxed{B_x=B^{/}{}_x}$.

И така, трансформациите на Лоренц за векторите на електромагнитното поле имат вида:

$$(9)\quad \begin{cases} E_x = E'_x, \\ E_y = \gamma\,(E'_y + V.B'_z) \equiv \dfrac{E'_y + V.B'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ E_z = \gamma\,(E'_z - V.B'_y) \equiv \dfrac{E'_z - V.B'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = B'_x, \\ B_y = \gamma\left\{B'_y - \dfrac{V}{c^2}.E'_z\right\} \equiv \dfrac{B'_y - \dfrac{V}{c^2}.E'_z}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \\ B_z = \gamma\left\{B'_z + \dfrac{V}{c^2}.E'_y\right\} \equiv \dfrac{B'_z + \dfrac{V}{c^2}.E'_y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{cases}$$

***Допълнение:** Трансформациите на Лоренц (9) показват **единната природа на електромагнитното поле**, но разкриват и една негова важна **особеност** - **ЕМ поле е относително**, т.е. то има една стойност за един наблюдател (*една ИОС*) и друга стойност за друг наблюдател (*друга ИОС*).



Тъй като формули (9) са изведени за случая на т.нар. **специални трансформации** на Лоренц, за които скоростта на системата K' спрямо системата K е $\vec{V} = (V,0,0)$, то очевидно могат да се въведат **успоредни** ($\parallel$) и **перпендикулярни** $(\perp)$ на $\vec{V}$ „компоненти" на полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$, а именно

$\vec{E}_\parallel = (E_x,0,0)$ и $\vec{E}_\perp = (0,E_y,E_z)$, като $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp}$;

$\vec{B}_\parallel = (B_x,0,0)$ и $\vec{B}_\perp = (0,B_y,B_z)$, като $\boxed{\vec{B} = \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp}$.

Очевидно същото представяне по ($\parallel$) и ($\perp$) спрямо $\vec{V}$ „компоненти" може да се приложи и в ИОС K', т.е за „*примованите*" координати.

$\vec{E}'_\parallel = (E'_x,0,0)$ и $\vec{E}'_\perp = (0,E'_y,E'_z)$, като $\vec{E}' = \vec{E}'_\parallel + \vec{E}'_\perp$;

$\vec{B}'_\parallel = (B'_x,0,0)$ и $\vec{B}'_\perp = (0,B'_y,B'_z)$, като $\vec{B}' = \vec{B}'_\parallel + \vec{B}'_\perp$.

Лесно може да се установи, че компонентите на векторното произведение $\vec{V}\times\vec{E}$ и $\vec{V}\times\vec{B}$ са

$$(*)\qquad \vec{V}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + (-VE_z)\,\vec{j} + (VE_y)\,\vec{k}\,, \quad \text{и}$$

$$(**)\qquad \vec{V}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + (-VB_z)\,\vec{j} + (VB_y)\,\vec{k}\,.$$

С отчитането на (*) и (**) трансформационните закони (9) могат да се представят още във вида

$$
(9^{/})\quad \left|\begin{array}{l}
E_x = E^{/}{}_x, \\
E_y = \gamma\ (E^{/}{}_y - (\vec{V}\times\vec{B}^{/})_z) \\
E_z = \gamma\ (E^{/}{}_z - (\vec{V}\times\vec{B}^{/})_y); \quad и \\
B_x = B^{/}{}_x, \\
B_y = \gamma\ \left\{B^{/}{}_y + \dfrac{1}{c^2}.(\vec{V}\times\vec{E}^{/})_z\right\}, \\
B_z = \gamma\ \left\{B^{/}{}_z + \dfrac{1}{c^2}.(\vec{V}\times\vec{E}^{/})_y\right\}.
\end{array}\right.
$$

Ако запишем трансформациите на Лоренц ($9^{/}$) с помощта на така въведените ($\|$) и ($\perp$) „компоненти”, то те ще имат вида на следните векторни равенства

$$
(10)\quad \left|\begin{array}{l}
\vec{E}_{\|} = \vec{E}^{/}{}_{\|} \\
\vec{E}_{\perp} = \gamma[\vec{E}^{/}{}_{\perp} - \vec{V}\times\vec{B}^{/}{}_{\perp}]
\end{array}\right. \qquad и \qquad \left|\begin{array}{l}
\vec{B}_{\|} = \vec{B}^{/}{}_{\|} \\
\vec{B}_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}^{/}{}_{\perp} + \dfrac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}^{/}{}_{\perp}]\right)
\end{array}\right. .
$$

Вижда се, че при смяна на ИОС „компонентите” $\vec{E}_{\|}$ и $\vec{B}_{\|}$, които са насочени по посока на скоростта $\vec{V}$, **не се изменят**.

✸ **Задача:** да се докаже следното (*неочевидно*) **свойство** на ЕМ поле: ако напр. спрямо „подвижна” система $K^{/}$ полето е само (т.е. „*чисто*”) електрично ($\vec{B}^{/} = 0$), или само (т.е. „*чисто*”) магнитно ($\vec{E}^{/} = 0$), то и в двата случая относно някаква „неподвижна” координатна система K електричното и магнитното полета са взаимно перпендикулярни, т.е. $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Доказателство:

1.) Допускаме, че полето в $K^{/}$ е **само електрично**, т.е. че $\vec{B}^{/} = 0$. Това ще означава, че $\vec{B}^{/}{}_{\|} = 0$ и $\vec{B}^{/}{}_{\perp} = 0$. Тогава от формули (10) от допълнението към предната задача ще имаме

$$
(1)\quad \left|\begin{array}{l}
\vec{E}_{\|} = \vec{E}^{/}{}_{\|} \\
\vec{E}_{\perp} = \gamma\,\vec{E}^{/}{}_{\perp}
\end{array}\right. \qquad и \qquad (2)\quad \left|\begin{array}{l}
\vec{B}_{\|} = 0 \\
\vec{B}_{\perp} = \gamma\dfrac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}^{/}{}_{\perp}]
\end{array}\right. .
$$

Ако изразим $\vec{E}^{/}{}_{\perp} = \dfrac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}$ и заместим в израза (2) за $\vec{B}_{\perp}$, ще получим

$$
(3)\qquad \vec{B}_{\perp} = \gamma\frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}^{/}{}_{\perp}] = \gamma\frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\frac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}].
$$

Тогава, отчитайки че $\vec{B}_{\|} = 0$, ще имаме

$$
(4)\qquad \vec{B} = \vec{B}_{\|} + \vec{B}_{\perp} = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}] + 0 = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}_{\perp}] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times(\vec{E}_{\perp}+\vec{E}_{\|})] = \frac{1}{c^2}[\vec{V}\times\vec{E}],
$$

понеже $\vec{V}\times\vec{E}_{\|} = 0$, откъдето следва, че действително $\vec{B}\perp\vec{E}$.

2.) Аналогично, допускаме, че полето в $K^{/}$ е **само магнитно**, т.е. че $\vec{E}^{/} = 0$. Това ще означава, че $\vec{E}^{/}{}_{\|} = 0$ и $\vec{E}^{/}{}_{\perp} = 0$. Тогава от формули (10) от допълнението към предната задача ще имаме

(5) $\left| \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel} = 0 \\ \vec{E}_{\perp} = -\gamma [\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] \end{array} \right.$ и (6) $\left| \begin{array}{l} \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{B}'_{\perp} \end{array} \right.$.

Ако изразим $\vec{B}'_{\perp} = \dfrac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}$ и заместим в израза (5) за $\vec{E}_{\perp}$, ще получим

(7) $\vec{E}_{\perp} = -\gamma [\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] = -\gamma [\vec{V} \times \dfrac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}] = -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}]$.

Тогава, отчитайки че $\vec{E}_{\parallel} = 0$, ще имаме

(8) $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = 0 - [\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] \equiv -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] = -[\vec{V} \times (\vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{\parallel})] = -[\vec{V} \times \vec{B}]$,

понеже $\vec{V} \times \vec{B}_{\parallel} = 0$, откъдето отново следва, че действително $\vec{E} \perp \vec{B}$.

В сила е и твърдение, обратно на току-що доказаното, а именно: ако относно някаква система K полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са взаимно перпендикулярни ($\vec{E} \perp \vec{B}$), **но не равни по големина**, то съществува такава система K', спрямо която полето е **само електрично** ($\vec{B}' = 0$), или **само магнитно** ($\vec{E}' = 0$).

✸ **Задача** (зад. 343/стр.54) Да се определят потенциалите φ, $\vec{A}$ и векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на **равномерно праволинейно движещ се** заряд q.

Решение:

В КС (K'), свързана със заряда, потенциалите са известни, и те са потенциали на неподвижен (спрямо K') точков заряд:

(1) $\varphi'(r') = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}$;

(2) $\vec{A}'(r') = 0$, където

(3) $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ - радиус-вектор в K'.

Сега ще „прехвърлим” разглежданията в КС (K), спрямо която зарядът се движи със скорост $\vec{V}$ по направление на оста $O\vec{x}$. Нека за целта приложим законите за лоренцови трансформации на 4-вектор

(4)
$$\begin{aligned} A^0 &= \gamma (A'^0 + \beta A'^1); \\ A^1 &= \gamma (A'^1 + \beta A'^0); \\ A^2 &= A'^2; \\ A^3 &= A'^3. \end{aligned}$$

спрямо компонентите на 4-потенциала $A^{\mu} = (A^0, \vec{A})$, където

☞ $A^0 = \dfrac{\varphi}{c}$, където φ - **скаларен потенциал на ЕМ поле**;

☞ $\vec{A}$ - **магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.**

Така получаваме:

$$\frac{\varphi}{c} = \gamma \left(\frac{\varphi'}{c} + \frac{V}{c} A'_x \right), \quad \text{т.е.} \quad \varphi = \frac{\varphi' + V A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

(5) $$A_x = \gamma\left(A'_x + \frac{V}{c}\frac{\varphi'}{c}\right), \quad \text{т.е.} \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c^2}\varphi'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

$$A_y = A'_y,$$

$$A_z = A'_z.$$

Тъй като $A'_x = A'_y = A'_z = 0$, то четирите равенства (5) добиват вида:

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'.\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

(6) $$A_x = \frac{\frac{V}{c^2}\varphi'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'.\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

$$A_y = 0, \qquad A_z = 0.$$

Остава (*чрез* ***обратно*** *преобразование на Лоренц*) да изразим x', y', z' чрез x, y, z. Използвайки трансформационния закон за 4-радиус-вектор

(7) $x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$; $\quad x'^1 = \gamma(x^1 + \beta x^0)$; $\quad x'^2 = x^2$; $\quad x'^3 = x^3$, т.е. $x' = \dfrac{x - V.t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, $\; y' = y$, $\; z' = z$, получаваме

(8) $$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\left(\frac{x - V.t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}.$$

Заместваме с така намереното представяне (8) за r' в (6), и получаваме

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{1-V^2/c^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}},$$

$$A_x = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{1-V^2/c^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}},$$

$$A_y = 0, \quad A_z = 0,$$

или още:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}},$$

(9) $$A_x = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} \equiv \frac{V}{c^2}\varphi,$$

$$A_y = 0, \quad A_z = 0, \quad \text{т.е.} \quad \vec{A} = \left(\frac{V}{c^2}\varphi, 0, 0\right).$$

Сега можем, при намерени вече потенциали, да определим и компонентите на електричния и магнитния вектори на полето на движещ се заряд:

(10) $\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\varphi$ и $\vec{B} = rot\ \vec{A}$,

или по компоненти

(11) $E_x = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial t}$, $E_y = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial t}$, $E_z = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial t}$.

(12) $\vec{B} = rot\ \vec{A} \equiv \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$, т.е.

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

(13) $$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

А) Намиране компонентите на електричното поле:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V}{c^2}\varphi\right) = -\frac{\partial}{\partial x}[\varphi] - \frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[\varphi] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 .\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} -$$

$$-\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 .\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} -$$

$$-\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2.(x-V.t)}{\left((x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}} -$$

$$-\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2.(x-V.t)(-V)}{\left((x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-V.t)}{\left((x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}} -$$

$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{V}{c^2}(x-V.t).V}{\left((x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-V.t)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left((x-V.t)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}.$$ И така

$$(14)\qquad E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-V.t)(1-V^2/c^2)}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}.$$

Аналогично, отчитайки, че $A_y = 0$, получаваме

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}, \text{ т.е.}$$

$$(15)\qquad E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}};$$

и (по пълна аналогия, понеже $A_z = 0$) ще следва, че

$$(16)\quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}.$$

Понеже $\vec{V} = (V,0,0)$, то $\vec{r} - \vec{V}.t = (x-V.t, y, z)$, и следователно покомпонентните скаларни представяния (14), (15) и (16) могат да се обобщят в следното векторно представяне

$$(17)\qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{V}.t)(1-V^2/c^2)}{\left((x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}.$$

Б) Остана да определим и компонентите на магнитния вектор от равенства (13), отчитайки, че $A_x = \frac{V}{c^2}\varphi$, $A_y = 0$ и $A_z = 0$:

$$(18)\qquad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \equiv 0.$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V}{c^2}\varphi\right) = \frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = -\frac{V}{c^2}E_z.$$

И така

$$(19)\qquad B_y = -\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = -\frac{V}{c^2}E_z.$$

Накрая определяме и B_z:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \equiv -\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{c^2}\varphi\right) = -\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}}$$

(20) $$B_z = \frac{V}{c^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2+(y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = \frac{V}{c^2}E_y\,.$$

Ако и тук обобщим представянето във векторен вид, ще имаме

(21) $$\vec{B} = \left(0, -\frac{V}{c^2}E_z, \frac{V}{c^2}E_y\right) \equiv \frac{1}{c^2}(0, -VE_z, VE_y)\,.$$

Забелязваме, че понеже $\vec{V} = (V,0,0)$, то

(22) $$\vec{V}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0\vec{i} + (-VE_z)\vec{j} + (VE_y)\vec{k} = (0, -VE_z, VE_y)\,,$$

т.е. същото, както (21), но без множителя $\frac{1}{c^2}$, и тогава очевидно ще бъде в сила релацията

(23) $$\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{V}\times\vec{E}) \equiv \frac{\vec{V}\times\vec{E}}{c^2}\,.$$

Тема: Електростатика

❖ Теоретичен минимум

🕮 Потенциал и интензитет на електростатично поле:

✓ $$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r^/)}{|r-r^/|}dV^/\,, \text{ и}$$

✓ $$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\,\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r^/)\cdot(r-r^/)}{|r-r^/|^3}dV^/\,,$$

понеже: $$grad\frac{1}{|r-r^/|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,/}}{|r-r^/|^3}\,.$$

🕮 Уравнение на Поасон:

✓ $$\Delta\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$$

🕮 Уравнение на Лаплас:

✓ $$\Delta\,\varphi = 0\,.$$

Тези уравнения се решават, като на границата между всеки две среди се прилагат изискванията (*идващи от граничните условия за* $\vec{E}$) за непрекъснатост на потенциала и на неговата първа производна, т.е. ако $r = r_0$ е гранична точка, то

✓ $$\varphi_i(r)\Big|_{r=r_0} = \varphi_j(r)\Big|_{r=r_0}$$ и ✓ $$\frac{\partial\varphi_i(r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \frac{\partial\varphi_j(r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0}\,.$$

🕮 Разложение на кулоновия потенциал:

✓ $$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\frac{r^l}{R^{l+1}}\,,$$

като за полиномите на Лежандър е в сила условието за ортогоналност

✓ $$\int_{-1}^{+1} P_l(x).P_{l'}(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} .$$

🕮 **Функции на Грийн**

а) за оператора на Лаплас:

✓ $$\Delta G(r) = -\delta(r), \qquad G(r) = \frac{1}{4\pi r}.$$

б) за оператора на Хелмхолц:

✓ $$(\Delta + k^2)G(r) = -\delta(r), \qquad G(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}.$$

в) за оператора на Д'Аламбер:

✓ $$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(r,t) = -\delta(r)\delta(t), \quad G(r) = \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}.$$

🕮 **Гранична задача на Дирихле за уравнението на Поасон:**

При нея се търси потенциалът $\varphi(r)$, явяващ се решение на задачата

✓ $\Delta\,\varphi(r) = -\dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$ при условие (*гранично*) ✓ $\varphi(r)\Big|_{r\in S_V} = \varphi(r_S)$.

За намиране решението на тази **гранична задача** се използва **функцията на Грийн** $G(r,r')$, явяваща се решение на следната гранична задача

✓ $\Delta\,G(r,r') = -\,\delta(r-r')$ при условие ✓ $G(r,r')\Big|_{r\in S_V} = 0$.

Понеже $\Delta\dfrac{1}{4\pi\left|r-r'\right|} = -\delta(r-r')$, то очевидно

✓ $G(r,r') = \dfrac{1}{4\pi\left|r-r'\right|}$ - това е функция на Грийн при област на решимост – цялото пространство**.**

Ако обаче областта на решимост V на задачата на Дирихле за уравнението на Поасон е **крайна област**, то функцията на Грийн се търси във вида

✓ $$G(r,r') = \frac{1}{4\pi\left|r-r'\right|} + F(r,r'),$$

където функцията $F(r,r')$ удовлетворява следните две условия:

❶ $\Delta\,F(r,r') = 0$, и ❷ избира се така, че $G(r,r')\Big|_{r\in S_V} = 0$.

При известна функция на Грийн потенциалът $\varphi(r)$ може да се изрази чрез интегралното представяне

✓ $$\varphi(r) = \int_V \frac{\rho(r')}{\varepsilon_0}G(r,r')\,dv - \oint_{S_V}\varphi(r_S)\frac{\partial G(r,r')}{\partial n}.\left|d\vec{S}\right|.$$

📖 **Електрични мултиполни моменти:**

☞ $\int_V \rho(r')\,dV' = q$ - **пълен заряд на системата;**

☞ $\int_V \rho(r')\cdot\vec{r}'\,dV' = \vec{p}$ - **електричен диполен момент на системата;**

☞ $\int_V \rho(r')\left[3\{\vec{r}'\cdot r'\} - r'^2\,\delta_0\right]dV' = d$ - **квадруполен момент на системата** (тензор).

✓ $$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{r}_0\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\vec{r}_0\cdot d\cdot\vec{r}_0}{8\pi\varepsilon_0 r^3} + \ldots.. = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \varphi_3(r) + \ldots..$$

Това представяне се нарича **мултиполно разложение на потенциала**.

✓ $\vec{E}(r) = \dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ - интензитет на полето на дипол.

Тема: Магнитостатика

❖ Теоретичен минимум

📖 **Магнитен векторен потенциал**

✓ $\Delta\vec{A} = -\mu_0\,\vec{j}$ - **векторен „аналог”** на скаларното **уравнение на Поасон** за скаларния електричен потенциал φ, имащо вида $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ и притежаващо решение $\varphi(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{V_\infty}\frac{\rho(r')\,dV'}{|r - r'|}$.

Следвайки аналогията между скаларното и векторното уравнения на Поасон, можем да запишем, че решението на $\Delta\vec{A} = -\mu_0\,\vec{j}$ се представя във вида

✓ $$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\vec{j}(r')}{|r - r'|}\,dV'.$$

Магнитен вектор:

✓ $\vec{B} = rot\,\vec{A} = \displaystyle\int_{V_\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{j}(r')\times\frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}\,dV'$ - **закон на Био-Савар**.

📖 **Магнитни мултиполни моменти:**

☞ $\vec{m} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V[\vec{r}'\times\vec{j}(r')]dV'$ - **магнитен диполен** момент.

Мултиполно разложение на магнитния векторен потенциал:

✓ $$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\,\vec{m}\times\vec{r}_0 \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}_0}{r^2}$$

Формулата изразява магнитния векторен потенциал на **голямо разстояние** от ограничена система от стационарни токове и се нарича още **формула за полето на магнитен дипол**.

Индукция на полето на магнитен дипол:

✓ $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{m}}{r^3}.$$

Тема: Плоска монохроматична електромагнитна вълна

❖ Теоретичен минимум

🕮 **Вълнови уравнения на ЕМ поле:**

✓ $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ и ✓ $\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$.

Уравнения от вида $\Delta\psi(r,t) - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial t^2} = -f(r,t)$ се наричат **нехомогенни вълнови уравнения.**

🕮 **Уравнение за 4-потенциала**

$$-\Box A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right) = \mu_0 j^\nu,$$

където

$$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$ **- оператор на Д'Аламбер.**

Понеже потенциалите не са еднозначно определени, можем спрямо тях да прилагаме т.нар. **калибровъчни условия**. Ако приложим следното калибровъчно условие за 4-потенциала

✓ $$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0,$$

То ще даде (в тримерна форма)

✓ $div\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ - **калибровка на Лоренц**.

При тази калибровка се получава вълново уравнение за 4-потенциала във вида

$\Box A^\nu = -\mu_0 j^\nu$, или още

✓ $\Delta A^\nu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} = -\mu_0 j^\nu$, за $\mu,\nu = 0,1,2,3$.

Извод: 4-потенциалът $A = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$ удовлетворява **нехомогенни вълнови уравнения**. В тримерна форма тези уравнения имат вида:

✓ $\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ **- вълново у-е за скаларния потенциал** φ;

✓ $\Delta\vec{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\,\vec{j}$ - **вълново у-е за магнитния векторен потенциал** $\vec{A}$.

📖 **Плоска монохроматична електромагнитна вълна**

✓ $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$; и ✓ $\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$,

където $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ са **комплексни постоянни вектори** (*постоянни вектори с комплексни компоненти*). Тези уравнения са решения на **хомогенните вълнови уравнения**, явяващи се следствия от уравненията на Максуел при **отсъствие на източници** ($\rho=0$ и $\vec{j}=0$):

✓
$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E}=0, \\ rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B}=0, \\ rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{array}\right.$$

✓ $\vec{E}\cdot\vec{n}=0$, ✓ $\vec{B}\cdot\vec{n}=0$, ✓ $\vec{B}=\dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$.

✸ **Задача:** Да се докаже, че полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на плоска електромагнитна вълна

(1) $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$; и (2) $\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$,

където $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ са **комплексни постоянни вектори**, удовлетворяват съотношенията

(3.1) $\vec{E}\cdot\vec{n}=0$, (3.2) $\vec{B}\cdot\vec{n}=0$, (3.3) $\vec{B}=\dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$.

Доказателство:

Уравненията (1) и (2) са решения на **хомогенните вълнови уравнения**, явяващи се следствия от уравненията на Максуел при **отсъствие на източници** ($\rho=0$ и $\vec{j}=0$):

$$(4)\quad\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E}=0, \\ rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B}=0, \\ rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{array}\right.$$

Ако се заместят (1) и (2) в (4), се получават връзки, даващи много полезна информация относно пространствената структура на ЕМ поле.

А) Доказателство на (3.1):

Ако заместим (1) в първото от уравнения (4), получаваме:

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t) = div\left(\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right) = \left(div\,\vec{E}_0\right) e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} + \vec{E}_0 .grad\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \equiv$$

$$\equiv \vec{E}_0 .grad\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} = \vec{E}_0 .grad\left(e^{i\omega t}\, e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\right) = \vec{E}_0\, e^{i\omega t} .grad\, e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}} =$$

$$= \vec{E}_0\, e^{i\omega t} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}} .grad\left(-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) = -\frac{i\omega}{c}\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} .grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}) =$$

$$= -\frac{i\omega}{c}\vec{E}\ .grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}).$$

Ако използваме формулата от векторния анализ $grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}) = \vec{n}$, получаваме

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{i\omega}{c}\vec{E}\ .\vec{n}\,.$$

Но съгласно (4) $div\,\vec{E}(\vec{r},t) = 0$, откъдето следва

$-\frac{i\omega}{c}\vec{E}\ .\vec{n} = 0$, т.е. $\vec{E}\ .\vec{n} = 0$, к.т.д.

Б) Доказателство на (3.2): напълно аналогично на това за (3.1), като в този случай заместваме (2) във третото от уравнения (4).

В) Доказателство на (3.3):

Заместваме (1) и (2) във второто от уравнения (4) и получаваме:

$$rot\left(\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right).$$

Ако приложим формулата от векторния анализ

$$rot(uU) = u\,rotU - U\times grad\,u\,,$$

ще получим

$$e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} rot\left(\vec{E}_0\right) - \vec{E}_0\times grad\left(e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right) = -\vec{B}_0\, e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\omega t})\,.$$

Отчитайки, че $rot\,(\vec{E}_0) = 0$, получаваме

$$-\vec{E}_0\times e^{i\omega t} grad\left(e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\right) = -\vec{B}_0\, e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}(i\omega e^{i\omega t})$$

$$-\vec{E}_0\times e^{i\omega t} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}} grad\left(-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) = -i\omega\vec{B}_0\, e^{i\omega t} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}$$

$$-\left(\frac{-i\omega}{c}\right)\vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\times grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}) = -i\omega\vec{B}_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \qquad \Big|:(-i\omega)$$

$$-\frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{n}=\vec{B}, \text{ т.е. } \quad \vec{B}=-\frac{\vec{E}\times\vec{n}}{c}\equiv\frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}, \text{ к.т.д.}$$

✸ **Задача:** да се аргументират представянията на електричния и магнитния вектори $\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi$ и $\vec{B}=rot\,\vec{A}$ с помощта на уравненията на Максуел по чисто теоретичен (*аналитичен*) начин, използвайки единствено съображения от векторния анализ.

Решение:

Съгласно уравненията на Максуел:

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} & div\,\vec{E}=0, \\ & rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ & div\,\vec{B}=0, \\ & rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

От третото от тях следва, че щом $div\,\vec{B}=0$ тъждествено, то векторът $\vec{B}$ трябва да има представянето

(2) $\quad \vec{B}=rot\;\vec{A},$

защото тогава $div\,\vec{B}=div\,rot\;\vec{A}=\nabla.\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\nabla.\vec{A}\equiv 0$.

Щом $\vec{B}$ има представянето (2), то тогава второто от уравнения (1) ще добие вида

(3) $\quad rot\,\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$, т.е. $\quad rot\,\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}(rot\,\vec{A})=0$, или още

(4) $\quad rot\,\vec{E}+rot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$, т.е. $\quad rot\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$.

Но от векторния анализ е известно, че НДУ $rot\,\vec{V}=0$ е $\vec{V}=\pm grad\,\varphi$. С отчитане на този факт можем за запишем, че

(5) $\quad \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-grad\,\varphi \quad$ (*взема се знак „-„ по исторически съображения*).

Така от (5) можем да заключим, че

(6) $\quad \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi, \qquad$ к.т.д.

✸ **Задача:** да се получат вълновите уравнения за потенциалите φ и $\vec{A}$, като се изходи от уравненията на Максуел.

Решение: при решаването на този проблем ще бъде наложително да се използват калибровъчни условия за потенциалите. Те са 2 основни типа:

А) калибровъчно условие на Лоренц:

(1) $4-div\,A=0$, т.е. $\dfrac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=0$, $\mu=0,1,2,3$.

Ако 4-мерната дивергенция от 4-потенциала $A^{\mu}=\left(\dfrac{\varphi}{c},\vec{A}\right)$ по компонентите на 4-радиус-вектора $x^{\mu}=(ct,x,y,z)$ се „разпише” по компоненти, ще имаме

(2) $\dfrac{\partial A^0}{\partial x^0}+\dfrac{\partial A^1}{\partial x^1}+\dfrac{\partial A^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial A^3}{\partial x^3}=0$, т.е. $\dfrac{\partial(\varphi/c)}{\partial(ct)}+\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}=0$,

откъдето получаваме тримерна форма на запис на калибровъчното условие на Лоренц

(3) $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+div\,\vec{A}=0$, или още $div\,\vec{A}=-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$.

Б) калибровъчно условие на Кулон:

(4) $div\,\vec{A}=0$.

След тези уточнения можем да пристъпим към намирането на вълновите уравнения.

А.) вълново уравнение за φ:

Заместваме $\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi$ в първото от уравненията на Максуел

$$
\left|
\begin{array}{l}
div\,\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0},\\[2mm]
rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\[2mm]
div\,\vec{B}=0,\\[2mm]
rot\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{j}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t},
\end{array}
\right.
$$

(5) $div\left(-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi\right)=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, т.е.

(6) $-\dfrac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{A})-div\,grad\,\varphi=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

**Забележка*: Ако приложим спрямо (6) калибровъчното условие на Кулон $div\,\vec{A}=0$ и отчетем, че $div\,grad\,\varphi=\Delta\varphi$, то (6) добива вида

(7) $-\Delta\varphi=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, т.е. $\Delta\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, което е уравнението на Поасон.

Нека спрямо (6) обаче приложим калибровъчното условие (3) на Лоренц, т.е.

(8) $div\,\vec{A}=-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$.

Тогава (6) добива вида

$$(7)\qquad -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$ или още

$$(8)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

С помощта на оператора на Д’Аламбер

$$\Box\equiv\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

получаваме следното уравнение, удовлетворявано от потенциала

$$\Box\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Б.) вълново уравнение за $\vec{A}$:

Заместваме $\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\;\varphi$ и $\vec{B}=rot\;\vec{A}$ в четвъртото от уравненията на Максуел**:**

$$(9)\qquad rot\;rot\;\vec{A}=\mu_0\,\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\;\varphi\right).$$

Но $rot\;rot\;\vec{A}=grad\,div\,\vec{A}-\Delta\vec{A}$, следователно

$$(10)\qquad grad\,div\,\vec{A}-\Delta\vec{A}=\mu_0\,\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(grad\;\varphi),$$ т.е.

$$(11)\qquad -\Delta\vec{A}=\mu_0\,\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-grad\,div\,\vec{A}-grad\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$ т.е.

$$(12)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\Delta\vec{A}=\mu_0\,\vec{j}-grad\left(div\,\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Лявата страна на (12) се представя посредством оператора на д’Аламбер, а в дясната страна прилагаме калибровката на Лоренц , т.е. $\left(div\,\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0$. Така (12) добива вида

$$\Box\vec{A}=-\mu_0\,\vec{j}\,.$$

✸ **Задача:** да се получат вълновите уравнения за векторите на ЕМ поле $\vec{E}$ и $\vec{B}$, като се изходи от уравненията на Максуел.

Решение:

Уравненията на Максуел са:

$$(1.1)\qquad div\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$(1.2)\qquad rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$(1.3)\qquad div\,\vec{B}=0,$$

(1.4) $\quad rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

А.) вълново уравнение за $\vec{E}$:

Прилагаме операцията rot спрямо уравнение (1.2)

(2) $\quad rot\,rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(rot\,\vec{B})$.

В дясната страна на (2) заместваме $rot\,\vec{B}$ от (1.4), а в лявата страна използваме, че $rot\ rot\ \vec{E} = grad\,div\,\vec{E} - \Delta\,\vec{E}$. Така уравнение (2) добива вида

(3) $\quad grad\,div\,\vec{E} - \Delta\,\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$.

Сега заместваме $div\,\vec{E}$ от (1.1)

(4) $\quad grad\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\,\vec{E} = -\mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\,\vec{j}\,) - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$.

Ако зарядите са разпределени хомогенно ($\rho = const$) или пък заряди липсват ($\rho = 0$), то $grad\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0$.

Ако токовете са стационарни ($\vec{j} = const$) или пък токове липсват ($\vec{j} = 0$), то $\dfrac{\partial}{\partial t}(\,\vec{j}\,) = 0$. Ако приемем, че е налице някой от горните два случая, то (4) добива вида

(5) $\quad -\Delta\,\vec{E} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$, или още

(6) $\quad \Delta\,\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$, т.е. $\qquad \Box\,\vec{E} = 0$.

Б.) вълново уравнение за $\vec{B}$:

Прилагаме отново операцията rot, но спрямо уравнение (1.4)

(7) $\quad rot\,rot\,\vec{B} = rot\left(\mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$, т.е.

(8) $\quad rot\,rot\,\vec{B} = \mu_0\,rot\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}rot\left(\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$, където $rot\left(\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}(rot\,\vec{E})$.

В дясната страна на (8) заместваме $rot\,\vec{E}$ от (1.2), а в лявата страна използваме, че $rot\ rot\ \vec{B} = grad\,div\,\vec{B} - \Delta\,\vec{B}$. Но съгласно (1.3) $div\,\vec{B} = 0$, следователно $rot\ rot\ \vec{B} = -\Delta\,\vec{B}$. Така уравнение (8) добива вида

(9) $\quad -\Delta\,\vec{B} = \mu_0\,rot\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$.

Ако токовете са стационарни ($\vec{j} = const$) или пък токове липсват ($\vec{j} = 0$), то $rot\,\vec{j} = 0$, следователно

(10) $-\Delta\vec{B} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$, т.е.

(11) $\Delta\vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$, или още $\square\,\vec{B} = 0$.

✸ **Задача:** Да се докаже, че за плоска ЕМ вълна $\varepsilon_0\,E^2 = \mu_0\,H^2$.

Доказателство: за плоска ЕМ вълна бяха доказани вече съотношенията

(1.1) $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$, (1.2) $\vec{B}\cdot\vec{n} = 0$, (1.3) $\vec{B} = \dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$.

Ако отчетем, че

(2) $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$, и (3) $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$,

то (1.3) добива вида

(4) $\vec{H} = \dfrac{\vec{n}\times\vec{E}}{\mu_0}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,(\vec{n}\times\vec{E})$.

Нека повдигнем двете страни на (4) в квадрат, като отчетем, че

(5) $(\vec{n}\times\vec{E})^2 = (\vec{n}\times\vec{E}).(\vec{n}\times\vec{E}) = \vec{n}^2\vec{E}^2 - (\vec{n}.\vec{E})^2$.

Но съгласно (1.1) $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$, а $\vec{n}^2 = 1$, следователно

(6) $(\vec{n}\times\vec{E})^2 = \vec{E}^2$.

С отчитането на (6) получаваме

(7) $\vec{H}^2 = \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}\vec{E}^2$, откъдето следва $\varepsilon_0\,E^2 = \mu_0\,H^2$, к.т.д.

✸ **Задача:** Да се изведе **уравнението на непрекъснатостта** (*в тримерна форма*) от уравненията на Максуел в материална среда.

Решение:

Уравненията на Максуел са:

(1.1) $div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$,

(1.2) $rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$,

(1.3) $div\,\vec{B} = 0$,

(1.4) $rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Изразяваме ρ от (1.1) и го диференцираме по времето:

(1) $\rho = \varepsilon_0\,div\,\vec{E}$, следователно

(2) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{E}) \equiv \varepsilon_0\, div\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Изразяваме $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ от (1.4): $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2(rot\,\vec{B} - \mu_0\,\vec{j})$, и заместваме в (2)

(3) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0\, div\,(c^2(rot\,\vec{B} - \mu_0\,\vec{j})) = \varepsilon_0\, c^2(div\;rot\,\vec{B}) - \varepsilon_0\,\mu_0\, c^2\, div\,\vec{j}\,.$$

Но $div\;rot\,\vec{B} = \nabla.\nabla\times\vec{B} \equiv 0$, а $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$, понеже $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. По този начин (3) добива вида

(4) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -div\,\vec{j}\,,$$ т.е.

(5) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0\,,$$

което представлява точно уравнението за непрекъснатостта в тримерна форма.

***Забележка**: Цитираните в настоящото ръководство задачи (Стр. *xxx*, Зад. *yyy*) визират „**Сборник задачи по теоретична физика**", с автори **Кръстю Иванов**, **Вълю Великов**, **Стефка Казакова**, Пловдивско университетско издание, **2002 г**.

Декември 2009 г. Гл. ас. Петко Митев